Processus de Galton-Watson. [GH].

Thm : Soit X v.a. à valeurs entières ($\mathbb{N}$). Notons $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X=k)$ avec $p_0 \in]0,1[$, $\mathbb{E}(X) < \infty$.
Soit $(X_{i,n})$ iid de même loi que X. Posons $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$ et $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.
Il s'agit d'étudier $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

Prop : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_{Z_n} = G_X^{\circ n}$

$$\mathbb{E}(s^{Z_{n+1}}) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} 1\!\!1_{Z_n=j}\, s^{\sum_{i=1}^{j} X_{i,n}}\right) \underset{FT}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(1\!\!1_{Z_n=j}\, s^{\sum_{i=1}^{j} X_{i,n}}\right) \underset{\text{indép}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n=j) \prod_{i=1}^{j} \mathbb{E}(s^{X_{i,n}})$$
$$= G_{Z_n}(G(s)) \text{ puis récurrence}$$

Prop : G_X est $\mathcal{C}^1[0,1]$, $\mathcal{C}^\infty[0,1[$.

$$G'_{X|]0,1[} > 0, \quad G''_{X|]0,1[} \geq 0, \quad G''_{X|]0,1[} > 0 \Leftrightarrow p_0 + p_1 < 1.$$

De plus, G_X a au plus un point fixe dans $]0,1[$.

Les premières propriétés découlent des propriétés sur les séries entières et du fait $\begin{cases} \mathbb{E}(X) < \infty \\ p_0 \in]0,1[\end{cases}$ (rayon de cv ≥ 1)

$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} = 0 \Leftrightarrow \forall k \geq 2, p_k = 0 \Leftrightarrow p_0 + p_1 = 1$.

- Si $p_0 + p_1 = 1$, alors G est affine et $p_0 \neq 0$ donc 1 est unique point fixe de G sur $[0,1]$.
- Sinon $h : x \mapsto G(x) - x$ est strictement convexe, donc s'annule au plus 2 fois sur $[0,1]$ et $h(1) = 0$.

Prop : (x_n) est convergente, de limite $x_\infty = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{Z_n = 0\}\right)$.
x_∞ est le plus petit point fixe de G_X sur $[0,1]$.

(x_n) est croissante ($Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$) majorée par 1 donc convergente et par continuité croissante, $\lim_{n \to +\infty} x_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{Z_n = 0\}\right)$.

- Si u est pt fixe de G_X, alors $\begin{cases} x_0 = 0 \leq G_X(u) = u \\ x_{n+1} = G_X(x_n) \leq G_X(u) = u \end{cases}$ par récurrence

donc $x_n \leq u$ puis $x_\infty \leq u$ et $x_{n+1} = G_X(x_n)$ donne $x_\infty = G_X(x_\infty)$

Prop : → Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $x_\infty = 1$.
→ Sinon : si $\mathbb{E}(X) \leq 1$, alors $x_\infty = 1$ (*)
si $\mathbb{E}(X) > 1$, alors $x_\infty \in]0,1[$. (**)

Si $p_0 + p_1 = 1$, G_X affine, seul point fixe 1.
Sinon, (*) puisque $G''_{X|]0,1[} > 0$, $\forall s < 1$, $G'(s) < G'(1) \leq 1$, donc
$1 - G(s) = \int_s^1 G' \leq 1 - s$, i.e. $G(s) > s$, donc $x_\infty = 1$ (pt fixe).

(**)

x	0		x_∞		1
h'	$p_1 - 1$	$-$	0	$+$	$\mathbb{E}(X) - 1$
h	p_0	↘	$\alpha < 0$	↗	0